超離散代数方程式の解 (可積分系数理の展望と応用)

AUTHOR(S):
広田, 良吾; 高橋, 大輔

数理解析研究所講究録 1422 巻 2005 年 106-119

超離散代数方程式の解

早稲田大学・理工学部 広田良吾, 高橋大輔
Ryogo Hirota and Daisuke Takahashi
School of Sci. and Eng., Waseda University

1 はじめに

1.1 何をやるのか?

例えば次の代数方程式

$$A_3X^3 - A_2X^2 + A_1X - A_0 = 0, \qquad A_3, A_2, A_1, A_0 \geq 0$$

を超離散化した方程式

$$\max(a_3 + 3x, a_1 + x) = \max(a_2 + 2x, a_0)$$

の解法について考える。

1.2 研究の動機

1. 離散的ソリトン方程式,例えばKdV方程式、Lotka-Volterra方程式、戸田方程式などのKP型の方程式などに、空間的な周期構造を課すと必然的に方程式は従属変数にたいする代数方程式になる。
   したがって周期的ソリトン方程式を超離散化しようとすると代数方程式の超離散化が必要になる。KP型の場合には複雑な係数をもつ2次の代数方程式になる。

2. しかし KdV+Sawada-Kotera 方程式や Hungry Lotka-Volterra の場合には3次以上の代数方程式が現れる。従って3次以上の代数方程式の超離散化が必要となる。一般の超離散代数方程式とその解について考える。

1.3 研究の歴史

超離散代数方程式とその解に関する過去の研究についてほとんど何も分からない。知っていることは次の事柄だけである。

1.3.1 1次代数方程式

$$A_0X + B_0 = A_1X + B_1, \quad A_0, B_0, A_1, B_1 > 0$$

の解は

$$X = -(B_0 - B_1)/(A_0 - A_1).$$

である。
しかし1次代数方程式を超離散化した方程式

$$\max(a_0 + x, b_0) = \max(a_1 + x, b_1)$$

の解は場合分けが必要である。これについては次の記述がある。
Baccelli F., Cohen G.J.,and Qudrat J.-P. *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems.* John Wiley and Sons,1992.
すなわち超離散方程式

$$\max(a_0 + x, b_0) = \max(a_1 + x, b_1)$$

の解は次の5つの場合に分類される：

1. If $(a_0 > a_1$ and $b_0 < b_1)$ or $(a_0 < a_1$ and $b_0 > b_1)$ (1)
   then
   $$x_1 = \max(b_0, b_1) - \max(a_0, a_1) \qquad \text{: unique solution.}$$

2. If $a_0 \neq a_1$ and $b_0 \neq b_1)$ and (1) does not hold,
   No solution exists in R.

3. If $a_0 = a_1$ or $b_0 \neq b_1$ then
   $$x \geq \max(b_0, b_1) - a_0 \qquad \text{: nonunique solution.}$$

4. If $a_0 \neq a_1$ or $b_0 = b_1$ then
   $$x \leq b_0 - \max(a_0, a_1) \qquad \text{: nonunique solution.}$$

5. If $a_0 = a_1$ or $b_0 = b_1$. All $x \in R$ are solutions.

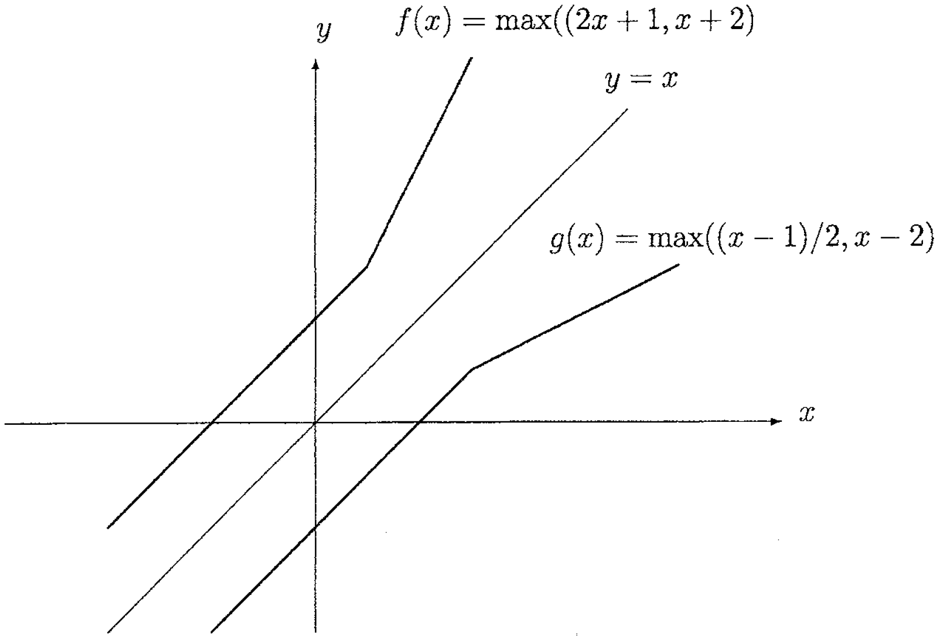

図 1: $g\circ f(x)=x,\quad f(x)=\max(2x+1,x+2),\quad g(x)=\max((x-1)/2,x-2)$

1.3.2 岩尾昌央君の結果 (2000 年頃, 未発表)

$f(x)$ を単調増大関数とし $g(x)$ を $f(x)$ の逆関数とする。すなわち

$$g\circ f(x)=x$$

である。
岩尾君は max-plus 関数

$$f(x)=\max(a_1x+b_1,a_2x+b_2),$$

$(a_1,a_2>0)$, の逆関数は

$$g(x)=\min((x-b_1)/a_1,(x-b_2)/a_2)$$

であることを発見した (図 1 参照)。なぜなら

$$\begin{aligned}
&g\circ f(x)\\
&=\min((f(x)-b_1)/a_1,(f(x)-b_2)/a_2\\
&=\min(\max(a_1x+b_1,a_2x+b_2)-b_1)/a_1,\max(a_1x+b_1,a_2x+b_2)-b_2)/a_2)\\
&=\min(\max(a_1x,a_2x+b_2-b_1)/a_1,\max(a_1x+b_1-b_2,a_2x)/a_2).
\end{aligned}$$

となるが場合分け
(i) if $a_1x>=a_2x+b_2-b_1$ then

$$r.h.s. = \min(x, \max(a_1x + b_1 - b_2)/a_2) = x,$$

(ii) if $a_1x < a_2x + b_2 - b_1$ then

$$r.h.s. = \min((a_2x + b_2 - b_1)/a_1, x) = x,$$

によって結局

$$g \circ f(x) = x.$$

となる。証明終わり。もう一度書くと

$$f(x) = \max(a_1x + b_1, a_2x + b_2)$$

の逆関数は

$$g(x) = \min((x - b_1)/a_1, (x - b_2)/a_2)$$

である。以下で、この結果を一般化する。記号

$$\sum_{j=1}^{N} \max(a_jx + b_j) \equiv \max(a_1x + b_1, a_2x + b_2, \cdots, a_Nx + b_N)$$

を導入すると

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \max(a_jx + b_j), \text{ for } a_j > 0.$$

の逆関数は

$$g(x) = \sum_{j=1}^{N} \min((x - b_j)/a_j)$$

となる。
たとえば次の $f(x)$ の場合には、書き直すと

$$\begin{aligned} f(x) &= \max(a_1x + b_1, a_2x + b_2, a_3x + b_3) \\ &= \max(\max(a_1x + b_1, a_2x + b_2), a_3x + b_3). \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の逆関数は

$$\begin{aligned} g(x) &= \min(\min((x - b_1)/a_1, (x - b_2)/a_2), (x - b_3)/a_3), \\ &= \min((x - b_1)/a_1, (x - b_2)/a_2, (x - b_3)/a_3). \end{aligned}$$

である。
岩尾君はさらに次のような超離散代数方程式の解も求めている。

1. $\max(0, a_1 + x, a_2 + 2x, \cdots, a_n + nx) = c,\ c > 0$ の解は
$$x = \min(c - a_1, (c - a_2)/2, \cdots, (c - a_n)/n),$$
2. $\max(x + a, \min(2x + b, 3x + c)) = y$ の解は
$$x = \min(y - a, \max((y - b)/2, (y - c)/3)),$$

で与えられることなども示している。

2　２次の代数方程式の超離散化

２次の代数方程式
$$A_0 + A_1X + A_2X^2 = B_0 + B_1X + B_2X^2$$
の超離散化を考える。

2.1　方程式の標準化

１次の代数方程式の解の分類でも面倒なので、まず方程式の標準化を考える。
２次方程式
$$A_0 - B_0 + (A_1 - B_1)X + (A_2 - B_2)X^2 = 0$$
を書き直す。$A_0 - B_0 \neq 0$ のとき
$$1 + \frac{A_1 - B_1}{A_0 - B_0}X + \frac{A_2 - B_2}{A_0 - B_0}X^2 = 0$$
である。これを書き直すと
$$1 + \frac{(A_1 - B_1)(A_0 - B_0)}{(A_0 - B_0)^2}X + \frac{(A_2 - B_2)(A_0 - B_0)}{(A_0 - B_0)^2}X^2 = 0$$
である。この形式(分母を２乗化した形式) を標準化と呼ぶ。
$A_0 - B_0 = 0$ のときは１次方程式に因数分解される。この標準化を使うと、すぐ前で調べた１次方程式
$$A_0 + A_1X = B_0 + B_1X$$
の場合は $A_1 - B_1 \neq 0$ のとき
$$X = \frac{(B_0 - A_0)(A_1 - B_1)}{(A_1 - B_1)^2}, \quad \text{or}$$
$$X = \frac{A_1B_0 + A_0B_1 - (A_0A_1 + B_0B_1)}{(A_1 - B_1)^2}$$

となり、超離散解 の分類は $A_0 \neq B_0$ and $A_1 \neq B_1$　のとき

1. 解なし。If $\max(a_1+b_0, a_0+b_1) < \max(a_0+a_1, b_0+b_1)$
2. 一個~~の解~~ $\max(a_1+b_0, a_0+b_1) - 2\max(a_1, b_1)$ がある。If $\max(a_1+b_0, a_0+b_1) > \max(a_0+a_1, b_0+b_1)$

と簡明になる。

2.2 2次の代数方程式の超離散解

2次の代数方程式の標準形 $(A_0 \neq B_0)$

$$1 + \frac{(A_1-B_1)(A_0-B_0)}{(A_0-B_0)^2}X + \frac{(A_2-B_2)(A_0-B_0)}{(A_0-B_0)^2}X^2 = 0$$

を使う。ここで X の1次と2次の係数を改めて A_1, A_2 と置くと,A_1, A_2 の正負に対応して2次の代数方程式は次の3つの場合に分類される $(A_1, A_2 > 0)$。

1. $1 + A_1X = A_2X^2$
2. $1 + A_2X^2 = A_1X$
3. $A_1X + A_2X^2 = 1$

注。$1 + A_1X + A_2X^2 = 0$ の場合は X の正値解は存在しないので場合分けに含めない。これらの場合に対応して超離散2次代数方程式は

1. $\max(0, a_1+x) = a_2 + 2x$
2. $\max(0, a_2+2x) = a_1 + x$
3. $\max(a_1+x, a_2+2x) = 0$

と分類される。

2次方程式の解を超離散化したものと超離散2次方程式の解は一致するか?

2.3 2次方程式の解の超離散化

最初によく知られている2次方程式の解を超離散化する。

1. 2次方程式 $A_2X^2 - A_1X - 1 = 0$ の解は次の2つである。

$$X_1 = \frac{A_1 + (A_1^2 + 4A_2)^{1/2}}{2A_2}$$
$$X_2 = \frac{A_1 - (A_1^2 + 4A_2)^{1/2}}{2A_2}$$

これを超離散化すると, 只1つの解

$$\begin{aligned} x_1 &= \max(a_1, \frac{1}{2}\max(2a_1, a_2)) - a_2 \\ &= \max(a_1 - a_2, -\frac{1}{2}a_2) \end{aligned}$$

が得られる。X_2 は値が負であるので超離散解にならない。

2. 2次方程式 $A_2X^2 - A_1X + 1 = 0$ の解は次の2つである。

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{A_1 + (A_1^2 - 4A_2)^{1/2}}{2A_2}, \\ X_2 &= \frac{A_1 - (A_1^2 - 4A_2)^{1/2}}{2A_2} \\ &= \frac{2}{A_1 + (A_1^2 - 4A_2)^{1/2}} \end{aligned}$$

これを超離散化すると,

(i) 解なし if $2a_1 < a_2$.

(ii) 2つの解 $x_1 = a_1 - a_2$, $x_2 = -a_1$ if $2a_1 > a_2$, が得られる。

3. 2次方程式 $A_2X^2 + A_1X - 1 = 0$ の解は次の2つである。

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-A_1 + (A_1^2 + 4A_2)^{1/2}}{2A_2} \\ &= \frac{2}{A_1 + (A_1^2 + 4A_2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$X_2 = \frac{-A_1 - (A_1^2 + 4A_2)^{1/2}}{2A_2}$$

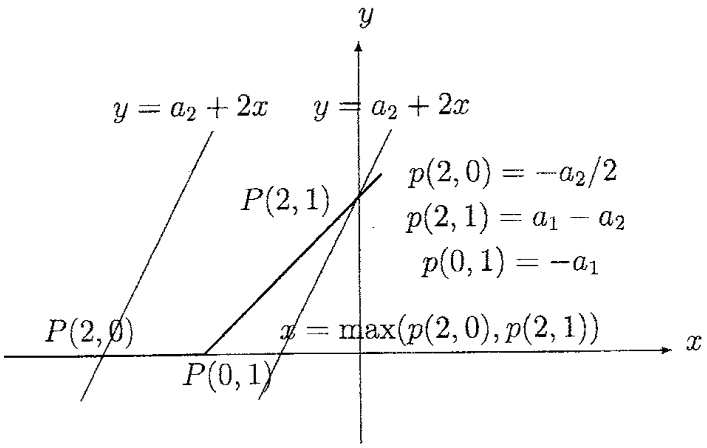

図 2: $\max(0, a_1 + x) = a_2 + 2x$ 1つの解 , x

これを超離散化すると, 只１つの解

$$\begin{aligned} x_1 &= -\max(a_1, \frac{1}{2}\max(2a_1, a_2)) \\ &= -\max(a_1, \frac{1}{2}a_2) \end{aligned}$$

が得られる。

2.4 超離散２次代数方程式の解の分類

次に超離散化された２次代数方程式の解を調べる。

1. $\max(0, a_1 + x) = a_2 + 2x$

   この場合、解は１つの直線 $y = a_2 + 2x$ と二つの直線 $y = 0$, $y = a_1 + x$ の交点の $x-$ 座標 $\{p(2,0), p(2,1)\}$ の中にある。図２より解は只１つ：

   $$x = \max(p(2,0), p(2,1)) = \max(-a_2/2, a_1 - a_2)$$

   である。

   この解は２次代数方程式の解を超離散化したものと一致している。

2. $\max(0, a_2 + 2x) = a_1 + x$
   この場合、解は１つの直線 $y = a_1 + x$ と二つの直線 $y = 0$, $y = a_2 + 2x$ の交点の $x-$

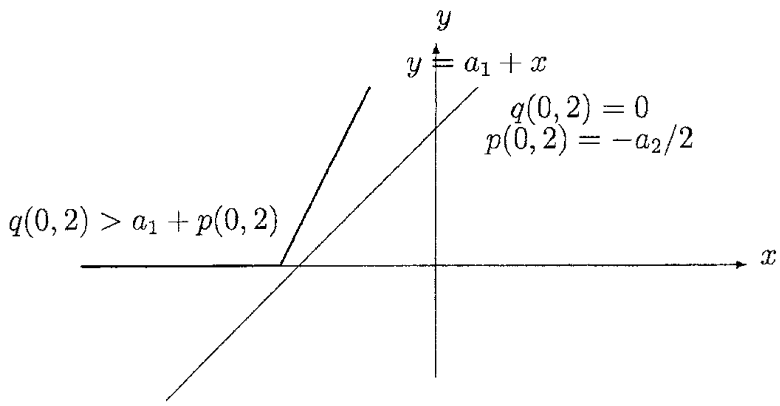

図 3: $\max(0, a_2 + 2x) = a_1 + x$: 解なし

座標 $\{p(1,0), p(1,2)\}$ の中にある。図3より
(i) 解なし　if　$0 > a_1 + p(0,2) = a_1 - \frac{1}{2}a_2$　　or if　$2a_1 < a_2$.
(ii) 2つの解　$x_2 = p(1,0) = -a_1$,　$x_1 = p(1,2) = a_1 - a_2$, if $2a_1 > a_2$,
である。
この解も2次代数方程式の解を超離散化したものと一致している。

3. $\max(a_1 + x, a_2 + 2x) = 0$　この場合、解は1つの直線 $y = 0$ と二つの直線 $y = a_1 + x$, $y = a_2 + 2x$ の交点の $x-$ 座標 $\{p(0,1), p(0,2)\}$ の中にある。グラフより解は只1つ：

$$x = \min(p(0,1), p(0,2)) = \min(-a_1, -a_2/2) = -\max(a_1, a_2/2)$$

である。この解も2次代数方程式の解を超離散化したものと一致している。

注　記号 $p(1,0), p(1,2)$ などについては第4章 { **一般的超離散方程式の解** } を見よ。

3　超離散3次方程式の解

結果だけをまとめると、超離散3次方程式は代数方程式

$$1 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 = 0$$

の係数 A_1, A_2, A_3 の正負によって次の7通りに分類される。

1. $\max(0, a_1 + x, a_2 + 2x) = a_3 + 3x$,　1

2. $\max(0, a_1 + x, a_3 + 3x) = a_2 + 2x$, 0 or 2

3. $\max(0, a_2 + 2x, a_3 + 3x) = a_1 + x$, 0 or 2

4. $\max(a_1 + x, a_2 + 2x, a_3 + 3x) = 0$, 1

5. $\max(0, a_1 + x) = \max(a_2 + 2x, a_3 + 3x)$, 1

6. $\max(0, a_2 + 2x) = \max(a_1 + x, a_3 + 3x)$, 1 or 3

7. $\max(a_1 + x, a_2 + 2x) = \max(0, a_3 + 3x)$, 0 or 2

注、最後の数字は超離散方程式の解の個数を示す。

4 一般的超離散方程式の解

次の形の一般的超離散方程式を考える。

$$\sum_{j=1}^{N} \max(a_j x + b_j) = \sum_{k=1}^{M} \max(c_k x + d_k)$$

ただし $a_j, c_k \geq 0$ and $a_j \neq c_k$ for $j = 1, 2, \ldots, N k = 1, 2, \ldots, M$ とする。

準備として２つの直線 $a_j x + b_j$ と $c_k x + d_k$ の交点の座標 $\{p(j,k), q(j,k)\}$ を定義する。交点の x-座標 $p(j,k)$ は次式で決まる。

$$a_j p(j,k) + b_j = c_k p(j,k) + d_k,$$

したがって

$$p(j,k) = -\frac{b_j - d_k}{a_j - c_k},$$

である。一方 y-座標 $q(j,k)$ は交点の x-座標 $p(j,k)$ より

$$q(j,k) = a_j p(j,k) + b_j = -a_j \frac{b_j - d_k}{a_j - c_k} + b_j = \frac{a_j d_k - c_k b_j}{a_j - c_k}.$$

である。

大事なポイントは『**超離散方程式の解** x **はもし存在すれば交点** $p(j,k) = -(b_j - d_k)/(a_j - c_k)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$ and $k = 1, 2, \ldots, M\}$ **の一つに等しい**』という事実である。

4.1 主要結果

超離散方程式

$$\sum_{j=1}^{N} \max(a_j x + b_j) = \sum_{k=1}^{M} \max(c_k x + d_k)$$

を考える。

I．特定の交点 $p(j_1, k_1)$ が解になるための必要十分条件は次式が成り立つことである。

$$\begin{aligned} q(j_1, k_1) &= \left.\sum_{j=1}^{N} \max(a_j x + b_j)\right|_{x=p(j_1,k_1)} \\ &= \left.\sum_{k=1}^{M} \max(c_j x + d_j)\right|_{x=p(j_1,k_1)} \end{aligned}$$

II． 超離散方程式

$$\sum_{j=1}^{N} \max(a_j x + b_j) = \sum_{k=1}^{M} \max(c_k x + d_k)$$

は次式に形に書き換えられる。

$$\min_{k=1}^{M}(\max_{j=1}^{N}(a_j x + b_j - c_k x - d_k)) = 0$$

この場合特定の交点 $p(j_1, k_1)$ が解になるための必要十分条件は次式が成り立つことである。

$$\left.\min_{k=1}^{M}(\max_{j=1}^{N}(a_j x + b_j - c_k x - d_k))\right|_{x=p(j_1,k_1)} = 0$$

最後に II の結果を使って一般的超離散方程式

$$\sum_{j=1}^{N} \max(a_j x + b_j) = \sum_{k=1}^{M} \max(c_k x + d_k)$$

を数値的に解く REDUCE Program と最後に 6 個の方程式の解の計算例を以下に示す。

```
Welcome to Reduce (Forbs System Co.Ltd)
REDUCE 3.7, 15-Jan-99 patched to nil ...
1: in "a:\max-plus-eq2.red";
%out "a:\max-plus-eq2.log";
%a:\max-plus-eq2.red
%July 29,04
```

```
%%---- Solve the  max-plus equations  ---%%
%%%---- The equation to be solved -----%%%
% max(for j:=1:nn collect hl(j,x))=max(for j:=1:nn collect hr(j,x))$
% where
% hl(j,x):=part(aa,j)*x+part(bb,j)$
% hr(k,x):=part(cc,k)*x+part(dd,k)$
load sets$
load assist$
operator a,b,c,d,x,eq0,eq1,eq2,eq3,f,g,hl,hr;
operator check;

n0:=12$

%-- Range of the parameter a,b.--$
m0:=12$ %-- Range of the parameter c,d.--$
nn1:=10$ %- A number of terms in the left hand side--%%
mm1:=7$  %- A number of terms in the right hand side--%%

%%-- Try 6 times ---%%
for s:=1:6 do
<<
%%--- Initial data set ----%%
aa1:=randomlist(n0,nn1)$
cc1:=randomlist(m0,mm1)$
%%-- Simplify the data set ---%%
saa:=mkset(aa1)$
scc:=mkset(cc1)$
sac:=saa intersect scc$
aa:=mkset(saa)\sac$
cc:=mkset(scc)\sac$
nn:=length(aa)$
mm:=length(cc)$
bb:=randomlist(n0,nn)$
dd:=randomlist(m0,mm)$

%%-- Possible solutions to the ultradiscrete algebraic equations.--%%
off nat;
for j:=1:nn do hl(j,x):=part(aa,j)*x+part(bb,j)$
for k:=1:mm do hr(k,x):=part(cc,k)*x+part(dd,k)$
%%-- The equation to be solved --%%
```

```
on nat;
write max(for j:=1:nn collect part(aa,j)*x+part(bb,j)),
  "=",max(for k:=1:mm collect part(cc,k)*x+part(dd,k))$
off nat;
%%--- The transformed equation ---%%
eq1(x):=min(for k:=1:mm collect max(for j:=1: nn collect hl(j,x)-hr(k,x)))$
%%-- Possible solutions --%%
for j1:=1:nn do for k1:=1:mm do
 x(j1,k1):=-(part(bb,j1)-part(dd,k1))/(part(aa,j1)-part(cc,k1))$
counter1:=0$
%%-- Check the possible solutions --%%
for j1:=1:nn do for k1:=1:mm do
 <<
 if sub(x=x(j1,k1),eq1(x))=0 then
  <<
    counter1:=counter1+1$
    x(counter1):=x(j1,k1)$
  >>$
 >>$
%%--- The set of solutions ---%%
 write xx:=mkset(for s:=1:counter1 collect x(s))$
 write "----- ----- ",s:=s," ----- ----- "$
>>$

max(x + 5,2*x + 9,6*x,8*x + 3)=max(9*x + 10,10*x + 4)

xx := {( - 1)/7}$

----- ----- s := 1 ----- ----- $

max(2*x + 3,7*x + 7)=5*x + 2

xx := {}$

----- ----- s := 2 ----- ----- $

max(5*x + 10,9*x + 3,10*x + 1)=max(3*x + 5,4*x + 3,6*x)

xx := {( - 5)/2}$
```

```
----- ----- s := 3 ----- ----- $

max(2*x + 6,3*x + 10,7*x + 2)=max(11,6*x + 8)

xx := {2/3,1/3,6}$

----- ----- s := 4 ----- ----- $

max(0,2*x + 2,11*x)=max(3*x + 5,4*x + 1,8*x + 4)

xx := {( - 5)/3,4/3}$

----- ----- s := 5 ----- ----- $

max(2*x + 9,4*x,8*x + 4)=max(6*x + 4,9*x + 1,10*x + 7)

xx := {1/4}$

----- ----- s := 6 ----- ----- $
end;
```